DYNAMISCH MODEL VAN DE INDUCTIEMOTOR

I. SPANNINGSVERGELIJKINGEN INDUCTIEMOTOR IN HET (d,q)-REFERENTIESTELSEL

I.1 STATOR

Zie document "DYNAMISCHE SPANNINGSVERGELIJKINGEN VAN DE INDUCTIEMOTOR":

$$\left[v_{abc,s}\right] = R_s\left[i_{abc,s}\right] + \frac{d}{dt}\left[\lambda_{abc,s}\right] \tag{1}$$

met

$$\left[\lambda_{abc,s}\right] = \left[L_s\right]\left[i_{abc,s}\right] + \left[L'_{sr}\right]\left[i'_{abc,r}\right] \tag{2}$$

1. Transformatie naar het stationair (d,q)-referentiestelsel van de stator

Zie document "dq-TRANSFORMATIE", vgll. (5) en (7):

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}\left[v_{abc,s}\right] &= \mathrm{T}R_s\mathrm{T}^{-1}\left[i^s_{dq,s}\right] + \mathrm{T}\,\frac{d}{dt}\left(\mathrm{T}^{-1}\left[\lambda^s_{dq,s}\right]\right)\\
\left[v^s_{dq,s}\right] &= R_s\left[i^s_{dq,s}\right] + \mathrm{T}\left\{\frac{d}{dt}\left(\mathrm{T}^{-1}\right)\left[\lambda^s_{dq,s}\right] + \mathrm{T}^{-1}\,\frac{d}{dt}\left[\lambda^s_{dq,s}\right]\right\}\\
\left[v^s_{dq,s}\right] &= R_s\left[i^s_{dq,s}\right] + \left[0\right] + \mathrm{T}\cdot\mathrm{T}^{-1}\,\frac{d}{dt}\left[\lambda^s_{dq,s}\right]\\
\left[v^s_{dq,s}\right] &= R_s\left[i^s_{dq,s}\right] + \frac{d}{dt}\left[\lambda^s_{dq,s}\right]\\
v^s_{dq,s} &= R_s i^s_{dq,s} + \frac{d}{dt}\lambda^s_{dq,s}
\end{aligned} \tag{3}$$

met

$$\begin{aligned}
\left[\lambda^s_{dq,s}\right] &= \mathrm{T}\left[\lambda_{abc,s}\right]\\
&= \mathrm{T}\left\{\left[L_s\right]\left[i_{abc,s}\right] + \left[L'_{sr}\right]\left[i'_{abc,r}\right]\right\}\\
&= \left(\mathrm{T}\left[L_s\right]\mathrm{T}^{-1}\right)\left[i^s_{dq,s}\right] + \left(\mathrm{T}\left[L'_{sr}\right]\mathrm{T}^{-1}\right)\left[i'^s_{dq,r}\right]\\
&= \left(\frac{3}{2}L_{ms} + L_{ls}\right)\left[i^s_{dq,s}\right] + \frac{3}{2}L_{ms}\left[i'^s_{dq,r}\right]
\end{aligned} \tag{4}$$

2. Transformatie van stationair naar roterend (d,q)-referentiestelsel

Zie document "dq-TRANSFORMATIE", vgl. (9):

$$
\begin{aligned}
e^{j\vartheta} \cdot v^{\omega}_{dq,s} &= R_s \cdot \left(e^{j\vartheta} \cdot i^{\omega}_{dq,s}\right) + \frac{d}{dt}\left(e^{j\vartheta} \cdot \lambda^{\omega}_{dq,s}\right) \\
e^{j\vartheta} \cdot v^{\omega}_{dq,s} &= R_s \cdot e^{j\vartheta} \cdot i^{\omega}_{dq,s} + \left[\frac{d}{dt}\left(e^{j\vartheta}\right) \cdot \lambda^{\omega}_{dq,s} + e^{j\vartheta} \cdot \frac{d}{dt}\lambda^{\omega}_{dq,s}\right] \\
e^{j\vartheta} \cdot v^{\omega}_{dq,s} &= R_s \cdot e^{j\vartheta} \cdot i^{\omega}_{dq,s} + e^{j\vartheta} \cdot j\frac{d\vartheta}{dt} \cdot \lambda^{\omega}_{dq,s} + e^{j\vartheta} \cdot \frac{d}{dt}\lambda^{\omega}_{dq,s} \\
v^{\omega}_{dq,s} &= R_s \cdot i^{\omega}_{dq,s} + j\omega \cdot \lambda^{\omega}_{dq,s} + \frac{d}{dt}\lambda^{\omega}_{dq,s}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

met

$$
\lambda^{\omega}_{dq,s} = \left(\frac{3}{2}L_{ms} + L_{ls}\right) i^{\omega}_{dq,s} + \left(\frac{3}{2}L_{ms}\right) i'^{\omega}_{dq,r} \tag{6}
$$

Uit vgll. (5) en (6) kunnen we het reële en imaginaire deel afsplitsen:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
v^{\omega}_{d,s} &= R_s i^{\omega}_{d,s} + \frac{d\lambda^{\omega}_{d,s}}{dt} - \omega\lambda^{\omega}_{q,s} \qquad & \lambda^{\omega}_{d,s} &= \left(\frac{3}{2}L_{ms} + L_{ls}\right) i^{\omega}_{d,s} + \left(\frac{3}{2}L_{ms}\right) i'^{\omega}_{d,r} \qquad (7) \\
v^{\omega}_{q,s} &= R_s i^{\omega}_{q,s} + \frac{d\lambda^{\omega}_{q,s}}{dt} + \omega\lambda^{\omega}_{d,s} \qquad & \lambda^{\omega}_{q,s} &= \left(\frac{3}{2}L_{ms} + L_{ls}\right) i^{\omega}_{q,s} + \left(\frac{3}{2}L_{ms}\right) i'^{\omega}_{q,r} \qquad (8)
\end{aligned}
}
$$

I.2 ROTOR

Zie document "DYNAMISCHE SPANNINGSVERGELIJKINGEN VAN DE INDUCTIEMOTOR":

$$
\left[v'_{abc,r}\right] = R'_r\left[i'_{abc,r}\right] + \frac{d}{dt}\left[\lambda'_{abc,r}\right] \tag{9}
$$

met

$$
\left[\lambda'_{abc,r}\right] = \left[L'_r\right]\left[i'_{abc,r}\right] + \left[L'_{sr}\right]^T\left[i_{abc,s}\right] \tag{10}
$$

1. Transformatie naar het (d,q)-referentiestelsel van de rotor

De elektrische rotorgrootheden hebben een elektrische hoekfrequentie $\omega_r = s.\omega_s$. Zowel het (a,b,c)-, als (d,q)-referentiestelsel zijn vast verbonden aan en draaien dus mee met de rotor. Zie document "dq-TRANSFORMATIE", vgll. (5) en (7):

$$
v'^{r}_{dq,r} = R'_r i'^{r}_{dq,r} + \frac{d}{dt}\lambda'^{r}_{dq,r} \tag{11}
$$

met

$$
\begin{aligned}
\left[\lambda'^{r}_{dq,r}\right] &= \mathrm{T}\left[\lambda'_{abc,r}\right] \\
&= \mathrm{T}\left[\left[L'_r\right]\left[i'_{abc,r}\right] + \left[L'_{sr}\right]^T i_{abc,s}\right] \\
&= \mathrm{T}\left[L'_r\right]\mathrm{T}^{-1}\cdot\left[i'^{r}_{dq,r}\right] + \left(\mathrm{T}\left[L_{sr}\right]^T \mathrm{T}^{-1}\right)\left[i^{r}_{dq,s}\right] \\
&= \left(\frac{3}{2}L_{ms} + L'_{lr}\right)\left[i'^{r}_{dq,r}\right] + \frac{3}{2}L_{ms}\left[i^{r}_{dq,s}\right]
\end{aligned}
\tag{12}
$$

2. Transformatie van rotor- naar stator-referentiestelsel

Zie document “dq-TRANSFORMATIE”, vgl. (7):

$$
\begin{aligned}
e^{-j\vartheta_r} v'^{s}_{dq,r} &= R'_r \cdot e^{-j\vartheta_r} i'^{s}_{dq,r} + \frac{d}{dt}\left(e^{-j\vartheta_r}\lambda'^{s}_{dq,r}\right) \\
e^{-j\vartheta_r} v'^{s}_{dq,r} &= R'_r \cdot e^{-j\vartheta_r} i'^{s}_{dq,r} + \frac{d}{dt}\left(e^{-j\vartheta_r}\right)\lambda'^{s}_{dq,r} + e^{-j\vartheta_r}\frac{d}{dt}\lambda'^{s}_{dq,r} \\
e^{-j\vartheta_r} v'^{s}_{dq,r} &= R'_r \cdot e^{-j\vartheta_r} i'^{s}_{dq,r} + e^{-j\vartheta_r}\left(-j\frac{d\vartheta_r}{dt}\right)\lambda'^{s}_{dq,r} + e^{-j\vartheta_r}\frac{d}{dt}\lambda'^{s}_{dq,r} \\
v'^{s}_{dq,r} &= R'_r \cdot i'^{s}_{dq,r} - j\omega_r \cdot \lambda'^{s}_{dq,r} + \frac{d}{dt}\lambda'^{s}_{dq,r}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

3. Transformatie van stator- naar algemeen roterend (d,q)-referentiestelsel

Zie document “dq-TRANSFORMATIE”, vgl. (9):

$$
\begin{aligned}
e^{j\vartheta}\cdot v'^{\omega}_{dq,r} &= e^{j\vartheta}\cdot R'_r \cdot i'^{\omega}_{dq,r} + \frac{d}{dt}\left(e^{j\vartheta}\cdot\lambda'^{\omega}_{dq,r}\right) - e^{j\vartheta}\cdot j\omega_r\lambda'^{\omega}_{dq,r} \\
e^{j\vartheta}\cdot v'^{\omega}_{dq,r} &= e^{j\vartheta}\cdot R'_r \cdot i'^{\omega}_{dq,r} + \frac{d}{dt}\left(e^{j\vartheta}\right)\cdot\lambda'^{\omega}_{dq,r} + e^{j\vartheta}\frac{d}{dt}\left(\lambda'^{\omega}_{dq,r}\right) - e^{j\vartheta}\cdot j\omega_r\lambda'^{\omega}_{dq,r} \\
e^{j\vartheta}\cdot v'^{\omega}_{dq,r} &= e^{j\vartheta}\cdot R'_r \cdot i'^{\omega}_{dq,r} + e^{j\vartheta}\cdot j\frac{d\vartheta}{dt}\cdot\lambda'^{\omega}_{dq,r} + e^{j\vartheta}\frac{d}{dt}\left(\lambda'^{\omega}_{dq,r}\right) - e^{j\vartheta}\cdot j\omega_r\lambda'^{\omega}_{dq,r} \\
v'^{\omega}_{dq,r} &= R'_r \cdot i'^{\omega}_{dq,r} + \frac{d}{dt}\left(\lambda'^{\omega}_{dq,r}\right) + j\left(\omega - \omega_r\right)\lambda'^{\omega}_{dq,r}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

met

$$
\lambda'^{\omega}_{dq,r} = \left(\frac{3}{2}L_{ms} + L'_{lr}\right) i'^{\omega}_{dq,r} + \left(\frac{3}{2}L_{ms}\right) i^{\omega}_{dq,s}
\tag{15}
$$

Uit vgll. (14) en (15) kunnen we het reële en imaginaire deel afsplitsen. Let wel op met de j-operator in vgl. (14):

$$j\lambda'^{\omega}_{dq,r} = j\left(\lambda'^{\omega}_{d,r} + j\lambda'^{\omega}_{q,r}\right) = -\lambda'^{\omega}_{q,r} + j\lambda'^{\omega}_{d,r} \qquad (16)$$

Bijgevolg:

$$\boxed{\begin{array}{ll} v'^{\omega}_{d,r} = R'_r i'^{\omega}_{d,r} + \dfrac{d\lambda'^{\omega}_{d,r}}{dt} - \left(\omega - \omega_r\right)\lambda'^{\omega}_{q,r} \quad & \lambda'^{\omega}_{d,r} = \left(\dfrac{3}{2}L_{ms} + L'_{lr}\right)i'^{\omega}_{d,r} + \left(\dfrac{3}{2}L_{ms}\right)i'^{\omega}_{d,s} \qquad (17) \\ v'^{\omega}_{q,r} = R'_r i'^{\omega}_{q,r} + \dfrac{d\lambda'^{\omega}_{q,r}}{dt} + \left(\omega - \omega_r\right)\lambda'^{\omega}_{d,r} \quad & \lambda'^{\omega}_{q,r} = \left(\dfrac{3}{2}L_{ms} + L'_{lr}\right)i'^{\omega}_{q,r} + \left(\dfrac{3}{2}L_{ms}\right)i^{\omega}_{q,s} \qquad (18) \end{array}}$$

NOOT:

In het geval van een kooimotor zijn de rotorspanningscomponenten altijd nul.

II. VERMOGEN EN KOPPEL

Toegevoerd of opgenomen elektrisch motorvermogen

$$v_{abc,s} \cdot i^*_{abc,s} = \frac{2}{3}\left(v_{a,s} + av_{b,s} + a^2 v_{c,s}\right) \cdot \frac{2}{3}\left(i_{a,s} + a^2 i_{b,s} + ai_{c,s}\right) \qquad (19)$$

Onder gebalanceerde condities ($i_{a,s} + i_{b,s} + i_{c,s} = 0$) volgt dat:

$$\mathrm{Re}\left[v_{abc,s} \cdot i^*_{abc,s}\right] = \tfrac{2}{3}\left(v_{a,s} i_{a,s} + v_{b,s} i_{b,s} + v_{c,s} i_{c,s}\right) \qquad (20)$$

Het ogenblikkelijk elektrisch vermogen dat aan de stator wordt toegevoerd volgt uit:

$$P_s = \left(v_{a,s} i_{a,s} + v_{b,s} i_{b,s} + v_{c,s} i_{c,s}\right) = \frac{3}{2}\mathrm{Re}\left[v_{abc,s} \cdot i^*_{abc,s}\right] \qquad (21)$$

dq-transformatie naar het stationair (d,q)-referentiestelsel:

$$\begin{aligned} P_s &= \frac{3}{2}\mathrm{Re}\left[v_{abc,s} \cdot i^*_{abc,s}\right] \\ &= \frac{3}{2}\mathrm{Re}\left[\left(v^s_{d,s} + jv^s_{q,s}\right)\left(i^s_{d,s} - ji^s_{q,s}\right)\right] \\ &= \frac{3}{2}\left(v^s_{d,s} i^s_{d,s} + v^s_{q,s} i^s_{q,s}\right) \\ &= \frac{3}{2}\left[i^s_{dq,s}\right]^{\mathrm{T}}\left[v^s_{dq,s}\right] \end{aligned} \qquad (22)$$

Een zelfde uitdrukking voor vermogen als vgl. (22) is algemeen van toepassing.

Geleverd elektromechanisch motorvermogen en -koppel

Het elektromechanisch vermogen is geassocieerd aan de snelheid van de rotor. Uit vgl. (13) halen we de term:

$$v_{dq}^{s}\Big|_{\omega_r} = -j\omega_r \lambda'^{s}_{dq,r} = -j\omega_r \left[\left(\frac{3}{2}L_{ms} + L'_{lr}\right)i'^{s}_{dq,r} + \left(\frac{3}{2}L_{ms}\right)i^{s}_{dq,s}\right] \tag{23}$$

Dit kunnen we uitwerken als:

$$\begin{bmatrix} v_d^s \\ v_q^s \end{bmatrix}_{\omega_r} = \omega_r \left(\frac{3}{2}L_{ms} + L'_{lr}\right)\begin{bmatrix} i'^{s}_{q,r} \\ -i'^{s}_{d,r} \end{bmatrix} + \omega_r \left(\frac{3}{2}L_{ms}\right)\begin{bmatrix} i^{s}_{q,s} \\ -i^{s}_{d,s} \end{bmatrix} \tag{24}$$

Het elektromechanisch vermogen volgt uit:

$$P_{em} = \frac{3}{2}\begin{bmatrix} i'^{s}_{d,r} & i'^{s}_{q,r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_d^s \\ v_q^s \end{bmatrix}_{\omega_r} \tag{25}$$

Vgl. (24) invullen in vgl. (25) en uitwerken:

$$\begin{aligned}
P_{em} &= \frac{3}{2}\begin{bmatrix} i'^{s}_{d,r} & i'^{s}_{q,r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_r \left(\frac{3}{2}L_{ms} + L'_{lr}\right)i'^{s}_{q,r} + \omega_r \frac{3}{2}L_{ms} i^{s}_{q,s} \\ -\omega_r \left(\frac{3}{2}L_{ms} + L'_{lr}\right)i'^{s}_{d,r} - \omega_r \frac{3}{2}L_{ms} i^{s}_{d,s} \end{bmatrix} \\
P_{em} &= \frac{3}{2}\omega_r \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{2}L_{ms} + L'_{lr}\right)i'^{s}_{q,r} i'^{s}_{d,r} + \frac{3}{2}L_{ms} i^{s}_{q,s} i'^{s}_{d,r} \\ -\left(\frac{3}{2}L_{ms} + L'_{lr}\right)i'^{s}_{d,r} i'^{s}_{q,r} - \frac{3}{2}L_{ms} i^{s}_{d,s} i'^{s}_{q,r} \end{pmatrix} \\
P_{em} &= \frac{3}{2}\omega_r \left(\left(\frac{3}{2}L_{ms} + L'_{lr}\right)\left(i'^{s}_{q,r} i'^{s}_{d,r} - i'^{s}_{d,r} i'^{s}_{q,r}\right) + \frac{3}{2}L_{ms}\left(i^{s}_{q,s} i'^{s}_{d,r} - i^{s}_{d,s} i'^{s}_{q,r}\right)\right) \\
P_{em} &= \frac{9}{4}\omega_r L_{ms}\left(i^{s}_{q,s} i'^{s}_{d,r} - i^{s}_{d,s} i'^{s}_{q,r}\right)
\end{aligned} \tag{26}$$

Tussen de elektrische rotorfrequentie $\omega_r = 2\pi f_r$ en de mechanische rotorhoeksnelheid ω_m bestaat de betrekking $\omega_r = (p/2)\omega_m$ met p het aantal polen van de inductiemotor:

$$P_{em} = \frac{9}{8} p\omega_m L_{ms}\left(i^{s}_{q,s} i'^{s}_{d,r} - i^{s}_{d,s} i'^{s}_{q,r}\right) \tag{27}$$

Het elektromechanisch koppel volgt nu uit:

$$T_{em} = \frac{P_{em}}{\omega_m} = \frac{9}{8} pL_{ms}\left(i^{s}_{q,s} i^{s}_{d,r} - i^{s}_{d,s} i^{s}_{q,r}\right) \tag{28}$$