THERMISCH MODEL VAN EEN RUIMTE

I. LINEAIR THERMISCH NETWERK

1. De temperatuurverandering van een ‘homogeen lichaam’ wordt beschreven door de differentiaalvergelijking:

$$C\frac{dT}{dt} = Q_i' - Q_o' \tag{1}$$

C = de (statische) warmtecapaciteit van het lichaam, ook wel de ‘thermische massa’ van het lichaam genoemd [J/K].
Q_i = het warmtevermogen dat aan het lichaam wordt toegevoerd [W]
Q_o = het warmtevermogen dat het lichaam verliest aan de omgeving [W]

2. De statische warmtecapciteit C is het produkt van de massa m [kg] van het homogene lichaam en de specifieke warmtecapaciteit c [J/(kg.K)] van het materiaal waaruit het lichaam is opgebouwd.

$$C = mc = \rho Vc \tag{2}$$

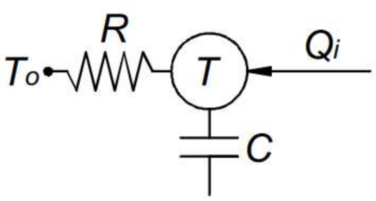
ρ = de massadichtheid van het materiaal waaruit het lichaam is opgebouwd [kg/m^3]
V = het volume van het lichaam [m^3]

3. Beschouwt men een omgeving op uniforme temperatuur T_o [°C]. Het warmteverlies van het lichaam naar de omgeving kunnen we uitdrukken door:

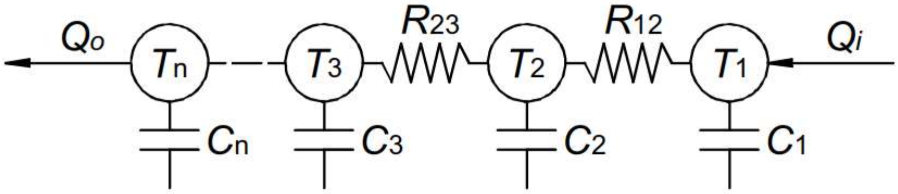
$$Q_o' = \frac{T - T_o}{R} \tag{3}$$

R = de thermische weerstand tussen het lichaam en de omgeving [K/W]

4. Het lichaam kan voorgesteld worden door een ‘knoop’ of ‘node’ waaraan een thermische capaciteit is gekoppeld. Aan één kant van de node wordt warmtevermogen toegevoerd, aan de andere kant wordt warmtevermogen afgevoerd:



5. Verschillende temperatuurnodes kunnen aan elkaar gerijgd worden om te komen tot een lineair thermisch netwerk.



De temperatuurverandering van elke node in de tijd wordt beschreven door een differentiaalvergelijking:

$$C_1 \frac{dT_1}{dt} = Q_i - \frac{T_1 - T_2}{R_{12}}$$

$$C_2 \frac{dT_2}{dt} = \frac{T_1 - T_2}{R_{12}} - \frac{T_2 - T_3}{R_{23}}$$

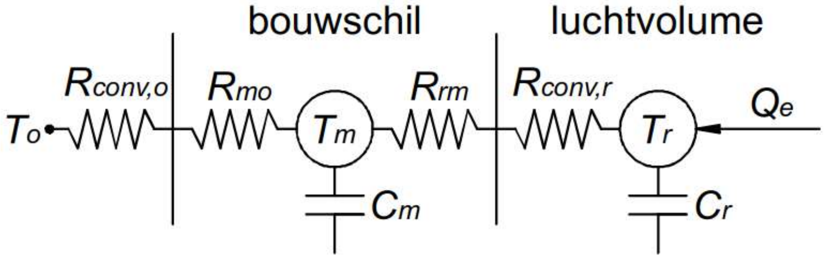
$$\cdots$$

$$C_n \frac{dT_n}{dt} = \frac{T_{n-1} - T_n}{R_{(n-1)n}} - Q_o'$$

We bekomen aldus een stelsel van n differentiaalvergelijkingen.

II. THERMISCH MODEL VAN EEN RUIMTE

1. Een ruimte zou men zich in essentie kunnen voorstellen als een luchtvolume omgeven door een bouwschil. ‘luchtvolume’ en ‘bouwschil’ kunnen opgevat worden als twee aan elkaar gekoppelde knopen in een lineair thermisch netwerk. Warmtevermogen wordt toegevoerd aan het luchtvolume, warmtevermogen stroomt in de bouwschil, door de bouwschil en zo naar de buitenomgeving. Het lineair thermisch netwerk ziet er als volgt uit:



Aan de binnenzijde van de bouwschil gebeurt de warmteoverdracht tussen het luchtvolume van de ruimte en de bouwschil door convectie. $R_{conv,r}$ is de convectieweerstand van de luchtlaag langs de binnenzijde van de bouwschil.

De knoop van de bouwschil is in het midden van de bouwschil gesitueerd. R_{rm} is de globale thermische geleidingsweerstand tussen de knoop 'luchtvolume' en de knoop 'bouwschil'. C_m is de globale effectieve thermische capaciteit van de bouwmassa. R_{mo} is de globale thermische geleidingsweerstand tussen de knoop 'bouwschil' en de buitenomgeving. $R_{conv,o}$ is de convectieweerstand van de luchtlaag langs de buitenzijde van de bouwschil.

2. Noteer dat het lineair 2N-model van de ruimte niet meer is dan een sterk vereenvoudigde voorstelling van de werkelijkheid. Zo wordt in dit model aangenomen dat de ganse bouwschil een uniforme temperatuur T_m bezit. In realiteit zal er in de bouwmassa sprake zijn van temperatuurgradienten in alle richtingen.

3. De thermische weerstand van de bouwschil R_m [K/W] is een globale waarde. In een warmteverliesberekening berekent men of beschikt men over de specifieke thermische weerstand [(m².K)/W] of specifieke thermische conductantie [W/(m².K)] van elk afzonderlijk bouwdeel (wanden, vloer, plafond, deuren, vensters,...). Het warmteverlies via elk bouwdeel wordt dan berekend m.b.v. de aangenomen ontwerpwaarden voor de temperaturen aan weerszijden van het bouwdeel en de thermische weerstand [K/W] of thermische conductantie [W/K] van het bouwdeel (waartoe de specifieke thermische weerstand van het bouwdeel wordt gedeeld door de gemiddelde waarde van de buiten- en binnenoppervlakte van het bouwdeel, dan wel de specifieke thermische conductantie ermee wordt vermenigvuldigd). De som van de warmteverliezen via elk bouwdeel levert het totaal warmteverlies ($Q_{l,tot}$) van de ruimte op. De globale thermische weerstand van de bouwschil die de ruimte begrenst, volgt dan uit:

$$R_m = \frac{T_r - T_o}{Q'_{l,tot}} \tag{4}$$

De helft van deze waarde kan men situeren tussen de knoop 'luchtvolume' en de knoop 'bouwschil' (R_{rm}), de andere helft tussen de knoop 'bouwschil' en de buitenomgeving (R_{mo}).

4. De effectieve thermische capaciteit C_m van de bouwschil mag niet verward worden met de statische thermische capaciteit zoals deze uit vgl. (2) zou volgen, door van elk bouwdeel de thermische capaciteit te berekenen en deze gewoon bij elkaar op te tellen. Er blijkt dat de effectieve capaciteit van de bouwschil beduidend kleiner is dan de statische waarde.

De effectieve thermische capaciteit van een bouwdeel kan men theoretisch bepalen door de sinusresponsie te berekenen van een lineair multinode-model (mN-model) van het bouwdeel. Daartoe wordt het bouwdeel in denkbeeldige lagen verdeeld, waarbij elke laag een node in een lineair netwerk vormt. Men legt aan één zijde van het bouwdeel een sinusvormig variërende temperatuur aan, aan de andere zijde blijft de temperatuur constant. Men bekomt aan die zijde van het bouwdeel na een overgangsverschijnsel een stationair sinusvormig verloop van de warmteflux [W/m²]; d.i de responsie van het bouwdeel op het sinusvormig temperatuursignaal. Herhaalt men de berekeningen voor verschillende perioden van het sinusvormig temperatuursignaal dan kan een Bodediagram van het mN-model worden getekend, waaruit dan de effectieve capaciteit C_m kan afgeleid worden. Een andere methode, die aansluit op de sinusresponsie van het mN-model, bestaat erin het lineair multinodenetwerk op te vatten als een elektrisch wisselstroomnetwerk. Deze methode wordt nader beschreven in [EFFECTIEVE WARMTECAPACITEIT].

5. De temperatuurverandering van de knoop 'luchtvolume' en de knoop 'bouwschil' in de tijd worden elk beschreven door een 1ste orde differentiaalvergelijking:

$$C_r \frac{dT_r}{dt} = Q'_e - \frac{T_r - T_m}{R_m} \qquad (5.a)$$

$$C_m \frac{dT_m}{dt} = \frac{T_r - T_m}{R_{rm}} - \frac{T_m - T_o}{R_{mo}} \qquad (5.b)$$

Mits enig rekenwerk, waarbij vgl. (5.a) eerst wordt afgeleid, waarna vgl. (5.b) in vgl. (5.a) wordt gesubstitueerd, kan het stelsel van twee 1ste orde differentiaalvergelijkingen gereduceerd worden tot één differentiaalvergelijking van de 2de orde:

$$\begin{aligned} R_{rm}R_{mo}C_rC_m \frac{d^2T_r}{dt^2} + \left[R_{mo}\left(C_m + C_r\right) + R_{rm}C_r\right]\frac{dT_r}{dt} + T_r &= \\ R_{rm}R_{mo}C_m \frac{dQ_e}{dt} + \left(R_{rm} + R_{mo}\right)Q_e + T_o & \end{aligned} \qquad (5.c)$$

6. In plaats echter van de differentiaalvergelijking van de 2de orde te gebruiken, zullen wij verder onze toevlucht nemen tot een numerieke oplossing van de vgll. (5.a) en (5.b).

De afgeleiden van T_r en T_m naar de tijd kunnen numeriek benaderd worden door een achterwaartse differentie van de 2de orde. In numerieke gedaante worden de vgll. (5.a) en (5.b):

- **Node 'luchtvolume'**

$$\frac{3T_r(k)-4T_r(k-1)+T_r(k-2)}{2\Delta t} = \frac{Q_e(k)}{C_r} - \frac{T_r(k)}{R_{rm}C_r} + \frac{T_m(k)}{R_{rm}C_r}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(3+\frac{2\Delta t}{R_{rm}C_r}\right)T_r(k) + \frac{-2\Delta t}{R_{rm}C_r}T_m(k) = -T_r(k-2)+4T_r(k-1)+\frac{2\Delta t}{C_r}Q_e(k) \qquad (6.a)$$

- **Node 'bouwschil'**

$$\frac{3T_m(k)-4T_m(k-1)+T_m(k-2)}{2\Delta t} = \frac{1}{R_{rm}C_m}T_r(k) - \frac{R_{rm}+R_{mo}}{R_{rm}R_{mo}C_m}T_m(k) + \frac{1}{R_{mo}C_m}T_o(k)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-2\Delta t}{R_{rm}C_m}T_r(k) + \left(3+\frac{2\Delta t\left(R_{rm}+R_{mo}\right)}{R_{rm}R_{mo}C_m}\right)T_m(k) = -T_m(k-2)+4T_m(k-1)+\frac{2\Delta t}{R_{mo}C_m}T_o(k) \qquad (6.b)$$

De tijd is in numerieke berekeningen 'gediscritiseerd'. D.w.z. de tijd 'verspringt' in discrete stappen van het ene tijdstip naar het volgende tijdstip. De tijdstap tussen twee opeenvolgende tijdstippen wordt aangeduid met Δt. De tijdstippen zijn telkens een geheel veelvoud van de tijdstap Δt. Het tijdstip aangeduid met 'tijdindex' k stemt overeen met het tijdstip $t_k = k\Delta t$. Het tijdstip k kan beschouwd worden als het 'huidig tijdstip'. Het tijdstip k–1 is dan het eerst vorige tijdstip en het tijdstip k–2 het tweede vorige tijdstip.

Alle parameterwaarden in de vgll. (6.a) en (6.b) op vorige tijdstippen zijn gekend. Noteer dat de vgll. (6.a) en (6.b) zodoende een stelsel vormen van twee vergelijkingen in twee onbekenden $T_r(k)$ en $T_m(k)$, te weten de ruimtetemperatuur (temperatuur van het luchtvolume) en de inwendige bouwschiltemperatuur op het tijdstip k.

7. In vgl. (6.a) is $Q_e(k)$ de warmtevermogentoevoer in de ruimte op het tijdstip k. Dit toegevoerd warmtevermogen wordt geleverd door de warmte-emitter in de ruimte, bv. een radiator. Als dusdanig dient ook de warmteafgiftevergelijking van de warmte-emitter (zie [DE RADIATOR]) betrokken te worden bij het oplossen van het stelsel vergelijkingen.
Het warmtevermogen dat een warmte-emitter, zoals een radiator, aan de ruimte afgeeft, is echter ook onder meer afhankelijk van de momentane ruimtetemperatuur $T_r(k)$. De oplossingsmethode verloopt daarom iteratief: Men kiest een startwaarde voor de ruimtetemperatuur $T_r(k)$ (dit kan de ruimtetemperatuur op het vorig tijdstip k–1 zijn). Daarmee berekent men de warmteafgifte $Q_e(k)$ en m.b.v. vgl. (6.b) de inwendige bouwschiltemperatuur $T_m(k)$. Met deze twee uitkomsten berekent men m.b.v. vgl. (6.a) een nieuwe waarde voor de ruimtetemperatuur $T_r(k)$. Naarmate men de berekeningscyclus meer herhaalt, wordt het verschil tussen de oude en de nieuwe waarde van de ruimtetemperatuur $T_r(k)$ steeds kleiner (oude en nieuwe waarde convergeren). Men herhaalt aldus de berekeningscyclus tot het verschil voldoende klein is geworden (t.t.z. tot de gewenste nauwkeurigheid is bereikt, bv. 0,1 °C). We bekomen dat de ruimtetemperatuur $T_r(k)$, de bouwschiltemperatuur $T_m(k)$ en de warmteafgifte $Q_e(k)$ op het huidig tijdstip k, waarmee vervolgens de berekeningen kunnen voortgezet worden voor het volgend tijdstip.

8. De berekeningen starten op een zeker tijdstip, bv. k=0. Uit vgll. (6.a) en (6.b) volgt dat om de berekeningen te kunnen opstarten de ruimtetemperatuur en de bouwschiltemperatuur op de vorige twee tijdstippen –1 en –2 gekend moeten zijn. Daartoe kunnen we de premisse aannemen dat er aanvankelijk sprake is van een thermisch evenwicht: de ruimtetemperatuur T_r, de bouwschiltemperatuur T_m en de buitentemperatuur T_o zijn alle aan elkaar gelijk. Op het tijdstip $k = 0$ wordt dan de verwarming van de ruimte opgestart en beginnen de berekeningen.

9. Dit (weliswaar vereenvoudigd) thermisch 2N-model van een ruimte kan men nu aanwenden om in het geval van ruimteverwarming de temperatuurregeling van een ruimte dynamisch te simuleren.